#### Q-Phase Grundkurs Funktionen und Analysis (A)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Thema:** *Eigenschaften ganzrationaler Funktionen und Optimierungsprobleme (Q-GK-A1)* | | |  |
| **Zu entwickelnde Kompetenzen** | **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** | **Besondere Aufgaben** | **Dalton** |
| **Inhaltsbezogene Kompetenzen:**  *Die Schülerinnen und Schüler*   * *bestimmen Wendepunkte und beschreiben das Krümmungsverhalten einer ganzrationalen Funktion mit Hilfe von Ableitungen* * *bestimmen die Ableitung von Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten* * *nutzen ihre Kenntnisse der Differentialrechnung zur vollständigen Untersuchung ganzrationaler Funktionen* * führen Extremalprobleme durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese   **Prozessbezogene Kompetenzen:** Modellieren *Die Schülerinnen und Schüler*   * treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor.*(Strukturieren)* * übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)* * erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* * beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)* * beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung *(Validieren)*   ***Problemlösen***  *Die Schülerinnen und Schüler*   * finden und stellen Fragen zu einer gegebenen Problemsituation *(Erkunden)* * wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur, Tabelle …) aus, um die Situation zu erfassen *(Erkunden)* * nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. systematisches Probieren, Darstellungswechsel, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Verallgemeinern …) *(Lösen)* * setzen ausgewählte Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein *(Lösen)* * berücksichtigen einschränkende Bedingungen *(Lösen)* * führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus *(Lösen)* * vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und Gemeinsamkeiten *(Reflektieren)* | Da die Beschäftigung mit der Analysis mehr als ein halbes Jahr zurückliegt, müssen die Schülerinnen und Schüler hinreichend Gelegenheit zur Wiederholung haben. Dies kann teilweise in den Daltonstunden geschehen, möglichst schon am Ende des ersten Halbjahres.  Die Beschreibung von Links- und Rechtskurven über die Zu- und Abnahme der Steigung führt zu einer geometrischen Deutung der zweiten Ableitung einer Funktion als „Krümmung“ des Graphen und zur Betrachtung von Wendepunkten.  Die simultane Betrachtung beider Ableitungen führt zur Entdeckung eines weiteren hinreichenden Kriteriums für Extrempunkte. Anhand einer Funktion mit Sattelpunkt wird die Grenze dieses hinreichenden Kriteriums entdeckt. Vor- und Nachteile der beiden hinreichenden Kriterien werden abschließend von den Lernenden kritisch bewertet.  Stellen extremaler Steigung eines Funktionsgraphen werden im Rahmen geeigneter Kontexte (z. B. Neuverschuldung und Schulden oder Besucherströme in einen Freizeitpark/zu einer Messe und erforderlicher Personaleinsatz) thematisiert und dabei der zweiten Ableitung eine anschauliche Bedeutung als Zu- und Abnahmerate der Änderungsrate der Funktion verliehen.  Das Aufstellen der Funktionsgleichungen fördert Problemlösestrategien. Es wird deshalb empfohlen, den Lernenden hinreichend Zeit zu geben, u. a. mit Methoden des kooperativen Lernens selbstständig zu Zielfunktionen zu kommen.  An mindestens einem Problem entdecken die Schülerinnen und Schüler die Notwendigkeit, Randextrema zu betrachten (z. B. „Glasscheibe“ oder verschiedene Varianten des „Hühnerhofs“).  *ca. 7 Wochen* | **z**.B. größtmögliches Volumen einer quaderförmigen Schachtel | Einstieg in das Unterrichtsvorhaben über „Noch fit… in..Differenzialrechnung“ bzw. „Noch fit… in..Funktionsuntersuchungen“ |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Thema:** *Funktionen beschreiben Formen - Modellieren von Sachsituationen mit ganzrationalen Funktionen (Q-GK-A2)* | |  |  |
| **Zu entwickelnde Kompetenzen** | **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** | **Besondere Aufgaben** | **Dalton** |
| **Inhaltsbezogene Kompetenzen:**  *Die Schülerinnen und Schüler*   * bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben („Steckbriefaufgaben“) * benutzen den Gauß-Algorithmus als Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme * wenden den Gauß-Algorithmus ohne digitale Werkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind   **Prozessbezogene Kompetenzen:**  ***Modellieren***  *Die Schülerinnen und Schüler*   * erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren)* * treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren)* * übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)* * erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* * beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)* * beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung *(Validieren)* * verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung *(Validieren)* * reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen *(Validieren)*   ***Werkzeuge nutzen***  *Die Schülerinnen und Schüler*   * verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen … zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen * nutzen mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden […], Berechnen und Darstellen | Anknüpfend an die Einführungsphase (vgl. Thema E-A1) werden an einem Beispiel in einem geeigneten Kontext (z. B. Fotos von Brücken, Gebäuden, Flugbahnen) die Parameter der Scheitelpunktform einer quadratischen Funktion angepasst. Anschließend werden aus gegebenen Punkten Gleichungssysteme für die Parameter der Normalform aufgestellt.    Schülerinnen und Schüler erhalten Gelegenheit, über Grundannahmen der Modellierung (Grad der Funktion, Symmetrie, Lage im Koordinatensystem, Ausschnitt) selbst zu entscheiden, deren Angemessenheit zu reflektieren und ggf. Veränderungen vorzunehmen.  *ca. 3Wochen* | z.B. Trassierungsaufgaben |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Thema:** *Von der Änderungsrate zum Bestand (Q-GK-A3)* | |  |  |
| **Zu entwickelnde Kompetenzen** | **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** | **Besondere Aufgaben** | **Dalton** |
| **Inhaltsbezogene Kompetenzen:**  *Die Schülerinnen und Schüler*   * interpretieren Produktsummen im Kontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe * deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext * skizzieren zu einer gegebenen Randfunktion die zugehörige Flächeninhaltsfunktion   **Prozessbezogene Kompetenzen:**  ***Kommunizieren***  *Die Schülerinnen und Schüler*   * erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus […] mathematikhaltigen Texten und Darstellungen, aus mathematischen Fachtexten sowie aus Unterrichtsbeiträgen *(Rezipieren)* * formulieren eigene Überlegungen und beschreiben eigene Lösungswege *(Produzieren)* * wählen begründet eine geeignete Darstellungsform aus *(Produzieren)* * wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen *(Produzieren)* * dokumentieren Arbeitsschritte nachvollziehbar *(Produzieren)* * erstellen Ausarbeitungen und präsentieren sie *(Produzieren)* | Das Thema ist komplementär zur Einführung der Änderungsraten. Deshalb sollten hier Kontexte, die schon dort genutzt wurden, wieder aufgegriffen werden z.B. (Geschwindigkeit – Weg, Zuflussrate von Wasser – Wassermenge).  Der Einstieg kann über Aufgaben erfolgen, in denen sich die Schülerinnen und Schüler selbstständig eine Breite an Kontexten, in denen von einer Änderungsrate auf den Bestand geschlossen wird, erarbeiten.  Außer der Schachtelung durch Ober- und Untersummen sollen die Schülerinnen und Schüler eigenständig weitere unterschiedliche Strategien zur möglichst genauen näherungsweisen Berechnung des Bestands entwickeln und vergleichen. Die entstehenden Produktsummen werden als Bilanz über orientierte Flächeninhalte interpretiert.  Qualitativ können die Schülerinnen und Schüler so den Graphen einer Flächeninhaltsfunktion als „Bilanzgraphen“ zu einem vorgegebenen Randfunktionsgraphen skizzieren.  Falls die Lernenden entdecken, welche Auswirkungen dieser Umkehrprozess auf die Funktionsgleichung der „Bilanzfunktion“ hat, kann dies zur Überleitung in das folgende Unterrichtsvorhaben genutzt werden.  .  ca. 3 Wochen |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Thema:** *Von der Randfunktion zur Integralfunktion (Q-GK-A4)* | |  | |
| **Zu entwickelnde Kompetenzen** | **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** | **Besondere Aufgaben** | **Dalton** |
| **Inhaltsbezogene Kompetenzen:**  *Die Schülerinnen und Schüler*   * erläutern und vollziehen an geeigneten Beispielen den Übergang von der Produktsumme zum Integral auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs * erläutern geometrisch-anschaulich den Zusammenhang zwischen Änderungsrate und Integralfunktion (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) * nutzen die Intervalladditivität und Linearität von Integralen * bestimmen Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen * bestimmen Integrale mithilfe von gegebenen Stammfunktionen und numerisch, auch unter Verwendung digitaler Werkzeuge * ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate * bestimmen Flächeninhalte mit Hilfe von bestimmten Integralen   **Prozessbezogene Kompetenzen:**  ***Argumentieren***  *Die Schülerinnen und Schüler*   * stellen Vermutungen auf *(Vermuten)* * unterstützen Vermutungen beispielgebunden *(Vermuten)* * präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur *(Vermuten)* * stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her *(Begründen)*   ***Werkzeuge nutzen***  *Die Schülerinnen und Schüler*   * nutzen […] digitale Werkzeuge *[Erg. Fachkonferenz: Tabellenkalkulation und Funktionenplotter]* zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen * Verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … Messen von Flächeninhalten zwischen Funktionsgraph und   Abszisse … Ermitteln des Wertes eines bestimmten Integrals | Schülerinnen und Schüler sollen hier entdecken, dass die Bestandsfunktion eine Stammfunktion der Änderungsrate ist. Dazu kann das im vorhergehenden Unterrichtsvorhaben (vgl. Thema Q-GK-A3) entwickelte numerische Näherungsverfahren auf den Fall angewendet werden, dass für die Änderungsrate ein Funktionsterm gegeben ist.  Die Graphen der Änderungsrate und der Bestandsfunktion können die Schülerinnen und Schüler mit Hilfe einer Tabellenkalkulation und eines Funktionenplotters gewinnen, vergleichen und Beziehungen zwischen diesen herstellen.  Fragen, wie die Genauigkeit der Näherung erhöht werden kann, geben Anlass zu anschaulichen Grenzwertüberlegungen.  Da der Rekonstruktionsprozess auch bei einer abstrakt gegebenen Randfunktion möglich ist, wird für Bestandsfunktionen der Fachbegriff Integralfunktion eingeführt und der Zusammenhang zwischen Rand- und Integralfunktion im Hauptsatz formuliert (ggf. auch im Lehrervortrag).  Die Regeln zur Bildung von Stammfunktionen werden von den Schülerinnen und Schülern durch Rückwärtsanwenden der bekannten Ableitungsregeln selbstständig erarbeitet. (z.B. durch ein sog. Funktionendomino) In den Anwendungen steht mit dem Hauptsatz neben dem numerischen Verfahren ein alternativer Lösungsweg zur Berechnung von Gesamtbeständen zur Verfügung.  Davon abgegrenzt wird die Berechnung von Flächeninhalten, bei der auch Intervalladditivität und Linearität (bei der Berechnung von Flächen zwischen Kurven) thematisiert werden. Bei der Berechnung der Flächeninhalte zwischen Graphen werden die Schnittstellen in der Regel numerisch mit dem GTR bestimmt.  Komplexere Übungsaufgaben sollten am Ende des Unterrichtsvorhabens bearbeitet werden, um Vernetzungen mit den Kompetenzen der bisherigen Unterrichtsvorhaben (Funktionsuntersuchungen, Aufstellen von Funktionen aus Bedingungen) herzustellen  *ca 6 Wochen* |  |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Thema:** *Natürlich: Exponentialfunktionen (Q-GK-A5)* | |  | | |
| **Zu entwickelnde Kompetenzen** | **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** | **Besondere Aufgaben** | **Dalton** | |
| **Inhaltsbezogene Kompetenzen:**  *Die Schülerinnen und Schüler*   * wiederholen die Eigenschaften von Exponentialfunktionen * bestimmen ihre Ableitungen * bestimmen näherungsweise die Zahl e und untersuchen die Eigenschaften der natürlichen Exponentialfunktion * verketten die Exponentialfunktion mit einer linearen Funktion und nutzen diese zur Untersuchung von Wachstums- und Zerfallsprozessen * wenden die Kettenregel auf Verknüpfungen der natürlichen Exponentialfunktion mit linearen Funktionen an * definieren den natürlichen Logarithmus * bestimmen Integrale mithilfe von gegebenen Stammfunktionen und numerisch, auch unter Verwendung digitaler Werkzeuge   **Prozessbezogene Kompetenzen:**  ***Problemlösen***  *Die Schülerinnen und Schüler*   * erkennen und formulieren einfache und komplexe mathematische Probleme *(Erkunden)* * entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)* * nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. systematisches Probieren, Darstellungswechsel, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme) *(Lösen)* * führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus *(Lösen)* * variieren Fragestellungen auf dem Hintergrund einer Lösung *(Reflektieren).*   ***Werkzeuge nutzen***  *Die Schülerinnen und Schüler*   * Verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen … grafischen Messen von Steigungen * entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge und wählen diese gezielt aus * nutzen […] digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen | Nach einer Wiederholungsphase  werden die Eigenschaften einer allgemeinen Exponentialfunktion zusammengestellt. Der GTR unterstützt dabei die Klärung der Bedeutung der verschiedenen Parameter  Durch Untersuchung von Beispielen wird herausgearbeitet – auch mit Hilfe von GTR und Tabellenkalkulation dass eine Exponentialfunktion proportional zu ihrer Ableitung ist.  Die Suche nach einer Exponentialfunktion, die mit ihrer Ableitung übereinstimmt, führt zu näherungsweisen Bestimmung der Eulerschen Zahl- |  | Wiederholung der in der EF erworbenen Kompetenzen z. B. durch „Noch fit… in exponentiellem Wachstum?“ |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Thema:** *Modellieren (nicht nur) mit Exponentialfunktionen (Q-GK-A6)* | |  |  |
| **Zu entwickelnde Kompetenzen** | **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** | **Besondere Aufgaben** | **Dalton** |
| **Inhaltsbezogene Kompetenzen:**  *Die Schülerinnen und Schüler*   * untersuchen Wachstums- und Zerfallsvorgänge mithilfe funktionaler Ansätze * interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext * bilden in einfachen Fällen Ableitungen zusammengesetzter Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung) * wenden die Produktregel auf Verknüpfungen von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen an * nutzen Funktionen zur Beschreibung auch komplexer Sachzusmmenhänge   **Prozessbezogene Kompetenzen:**  ***Modellieren***  *Die Schülerinnen und Schüler*   * erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren)* * übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)* * erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* * erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* * ordnen einem mathematischen Modell verschiedene passende Sachsituationen zu *(Mathematisieren)* * beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)* * beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung *(Validieren)* * verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung *(Validieren)* * reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen *(Validieren)* | Im Zusammenhang mit der Modellierung von Wachstumsprozessen durch natürliche Exponentialfunktionen mit linearen Exponenten wird die Kettenregel eingeführt, um auch (hilfsmittelfrei) Ableitungen für die entsprechenden Funktionsterme bilden zu können. Als Beispiel für eine Summenfunktion wird eine Kettenlinie modelliert. An mindestens einem Beispiel sollte auch ein beschränktes Wachstum untersucht werden.  An Beispielen von Prozessen, bei denen das Wachstum erst zu- und dann wieder abnimmt (Medikamente, Fieber, Pflanzen), wird eine Modellierung durch Produkte von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen erarbeitet. In diesem Zusammenhang wird die Produktregel zum Ableiten eingeführt.  In diesen Kontexten ergeben sich ebenfalls Fragen, die erfordern, dass aus der Wachstumsgeschwindigkeit auf den Gesamteffekt geschlossen wird.  Parameter werden nur in konkreten Kontexten und nur exemplarisch variiert (keine systematische Untersuchung von Funktionenscharen). Dabei werden z. B. zahlenmäßige Änderungen des Funktionsterms bezüglich ihrer Auswirkung untersucht und im Hinblick auf den Kontext interpretiert. |  |  |

#### Q-Phase Grundkurs Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Thema:** *Beschreibung von Bewegungen und Schattenwurf mit Geraden (Q-GK-G1)*  **Stundenvolumen:** *GK: 11; LK: 15* | |  |  |
| **Zu entwickelnde Kompetenzen** | **Kapitel im Buch** | **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** |  |
| **Inhaltsbezogene Kompetenzen:**  *Die Schülerinnen und Schüler*   * stellen Geraden und Strecken in Parameterform dar * interpretieren den Parameter von Geradengleichungen im Sachkontext * stellen geradlinig begrenzte Punktmengen in Parameterform dar   **Prozessbezogene Kompetenzen:**  ***Modellieren***  *Die Schülerinnen und Schüler*   * erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren)* * treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren)* * übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)* * erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* * beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung *(Validieren)* * verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung *(Validieren)*   ***Werkzeuge nutzen***  *Die Schülerinnen und Schüler*   * nutzen Geodreiecke […] geometrische Modelle und Dynamische-Geometrie-Software * verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … grafischen Darstellen von Ortsvektoren, Vektorsummen und   Geraden … Darstellen von Objekten im Raum | **4.2 Geraden im Raum**  4.2.1. Parameterdarstellung einer Geraden  (Parameterdarstellungen einer Geraden bestimmen, Beschreibung von Strecken – Punktprobe)  **4.3 Winkel im Raum**  4.3.1 Orthogonalität zweier Vektoren – Skalarprodukt  (Orthogonalitätsprüfungen, Orthogonale Vektoren finden, Argumentieren mit dem Skalarprodukt)  4.3.2 Winkel zwischen Vektoren und Geraden  (Winkel zwischen zwei Vektoren, Untersuchungen an geometrischen Figuren, Winkel zwischen zwei Geraden im Raum) | Lineare Bewegungen werden z. B. im Kontext von Flugbahnen (Kondensstreifen) durch Startpunkt, Zeitparameter und Geschwindigkeitsvektor beschrieben und dynamisch mit DGS dargestellt. Dabei sollten Modellierungsfragen (reale Geschwindigkeiten, Größe der Flugobjekte, Flugebenen) einbezogen werden.  Ergänzend zum dynamischen Zugang wird die rein geometrische Frage aufgeworfen, wie eine Gerade durch zwei Punkte zu beschreiben ist. Hierbei wird herausgearbeitet, dass zwischen unterschiedlichen Parametrisierungen einer Geraden gewechselt werden kann. Punktproben sowie die Berechnung von Schnittpunkten mit den Grundebenen sollen auch hilfsmittelfrei durchgeführt werden. Die Darstellung in räumlichen Koordinatensystemen sollte hinreichend geübt werden. | Vorbereitung in Dalton  **Wiederholung: 4.1 Punkte und Vektoren im Raum (optional)**  4.1.1 Lage von Punkten im Raum beschreiben (Zeichnen von Punkten und Körpern in Koordinatensystemen; Lage von Punkten im Koordinatensystem erkennen und beschreiben; Projektion und Spiegelung von Punkten)  4.1.2 Vektoren (Verschiebungen, Vektoren und Pfeile; Längen von Vektoren berechnen)  4.1.3 Addition und Subtraktion von Vektoren (Summen und Differenzen von Vektoren berechnen und zeichnen; Dreiecksregel anwenden – Abstände zwischen zwei Punkten bestimmen; Bewegungen mit Vektoren bestimmen; Parallelogramme mit Vektoren beschreiben; Eigenschaften von Dreiecken untersuchen)  Vervielfachen von Vektoren (Mit Vektoren rechnen; Vektoren in Figuren bestimmen; Mittelpunkt einer Strecke berechnen) |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Thema:** *Lineare Algebra als Schlüssel zur Lösung von geometrischen Problemen (Q-GK-G2)*  **Stundenvolumen: GK: 15, LK: 28** | |  |  |
| **Zu entwickelnde Kompetenzen** | **Kapitel im Buch** | **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** |  |
| **Inhaltsbezogene Kompetenzen:**  *Die Schülerinnen und Schüler*   * stellen Ebenen in Parameterform und Koordinatenform dar * stellen geradlinig begrenzte Punktmengen in Parameterform dar * stellen Ebenen in Normalenform dar und nutzen diese zur Orientierung im Raum * bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen * untersuchen Lagebeziehungen […] zwischen Geraden und Ebenen * berechnen Schnittpunkte von Geraden sowie Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen und deuten sie im Sachkontext * stellen lineare Gleichungssysteme in Matrix-Vektor-Schreibweise dar * beschreiben den Gauß-Algorithmus als Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme * interpretieren die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen   **Prozessbezogene Kompetenzen:**  ***Problemlösen***  *Die Schülerinnen und Schüler*   * wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren) aus, um die Situation zu erfassen *(Erkunden)* * entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)* * wählen Werkzeuge aus, die den Lösungsweg unterstützen *(Lösen)* * nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. [...] Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, […]) *(Lösen)* * führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus *(Lösen)* * vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und Gemeinsamkeiten *(Reflektieren)* * beurteilen und optimieren Lösungswege mit Blick auf Richtigkeit und Effizienz *(Reflektieren)* * analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern *(Reflektieren)*   ***Werkzeuge nutzen***  *Die Schülerinnen und Schüler*   * verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen | **4.4 Ebenen im Raum**  4.4.1 Parameterdarstellung einer Ebene  (Punkte einer Ebene bestimmen – Punktprobe, Parameterdarstellung einer Ebene aus drei Punkten bestimmen, Parameterdarstellung von Ebenen durch Geraden und Punkte bestimmen, Parameterdarstellungen von Ebenen in Figuren bestimmen, Ebenen mit besonderer Lage im Koordinatensystem, Geraden, die in Ebenen liegen) (3 Std)  **4.5 Normalenvektor einer Ebene**  4.5.1 Normalenform und Koordinatenform einer Ebene  **4.6 Winkel zwischen Geraden und Ebenen**  4.6.1 Winkel zwischen einer Geraden und einer Ebene  4.6.2 Winkel zwischen zwei Ebenen  (4 Std)  **4.7 Abstandsberechnungen**  4.7.1 Abstand eines Punktes von einer Ebene und von einer Geraden  4.7.3 Abstand zueinander windschiefer Geraden | Als Einstiegskontext für die Parametrisierung einer Ebene kann eine Dachkonstruktion mit Sparren und Querlatten dienen. Diese bildet ein schiefwinkliges Koordinatensystem in der Ebene. Damit wird die Idee der Koordinatisierung aus dem Thema E-G2 wieder aufgegriffen.  In diesem Unterrichtsvorhaben werden Problemlösekompetenzen erworben, indem sich heuristische Strategien bewusst gemacht werden (eine planerische Skizze anfertigen, die gegebenen geometrischen Objekte abstrakt beschreiben, geometrische Hilfsobjekte einführen, bekannte Verfahren zielgerichtet einsetzen und in komplexeren Abläufen kombinieren und unterschiedliche Lösungswege kriteriengestützt vergleichen).  Punktproben sowie die Berechnung von Spurgeraden in den Grundebenen und von Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen führen zunächst noch zu einfachen Gleichungssystemen. Die Achsenabschnitte erlauben eine Darstellung in einem räumlichen Koordinatensystem.  Die Untersuchung von Schattenwürfen eines Mastes auf eine Dachfläche z. B. motiviert eine Fortführung der systematischen Auseinandersetzung (Q-GK-A2) mit linearen Gleichungssystemen, mit der Matrix-Vektor-Schreibweise und mit dem Gauß-Verfahren.  Die Lösungsmengen werden mit dem GTR bestimmt, zentrale Werkzeugkompetenz in diesem Unterrichtsvorhaben ist die Interpretation des angezeigten Lösungsvektors bzw. der reduzierten Matrix. Die Vernetzung der geometrischen Vorstellung (Lagebeziehung) und der algebraischen Formalisierung sollte stets deutlich werden. | Dalton  4.5.2 Lagebeziehungen mithilfe eines Normalenvektors untersuchen  4.7.2 Die Hesse’sche Normalenform |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Thema:** *Eine Sache der Logik und der Begriffe: Untersuchung von Lagebeziehungen (Q-GK-G3)*  **Stundenvolumen:** *GK: 17 LK: 22* | |  |  |
| **Zu entwickelnde Kompetenzen** | **Kapitel im Buch** | **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** |  |
| **Inhaltsbezogene Kompetenzen:**  *Die Schülerinnen und Schüler*   * untersuchen Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden […]   **Prozessbezogene Kompetenzen:**  ***Argumentieren***  *Die Schülerinnen und Schüler*   * präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur *(Vermuten)* * stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (Ober- / Unterbegriff) *(Begründen)* * nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen *(Begründen)* * berücksichtigen vermehrt logische Strukturen (notwendige / hinreichende Bedingung, Folgerungen / Äquivalenz, Und- / Oder-Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen) *(Begründen)* * überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können *(Beurteilen)*   ***Kommunizieren***  *Die Schülerinnen und Schüler*   * erläutern mathematische Begriffe in theoretischen und in Sachzusammenhängen *(Rezipieren)* * verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang *(Produzieren)* * wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen *(Produzieren)* * erstellen Ausarbeitungen und präsentieren sie *(Produzieren)* * vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität *(Diskutieren)* | 4.2.2 Lagebeziehungen zwischen Geraden (11 Std)  (Lagebeziehungen von Geraden zueinander untersuchen, Geraden mit vorgegebenen Lagen zueinander bestimmen, Geraden in geometrischen Figuren, Geraden in Anwendungen)  4.4.2 Lagebeziehungen zwischen Gerade und Ebene  (Gemeinsame Punkte von Geraden mit Ebenen bestimmen, Geraden und Ebenen mit zueinander vorgegebener Lage bestimmen, Geraden und Ebenen in geometrischen Figuren) | Der Fokus der Untersuchung von Lagebeziehungen liegt auf dem logischen Aspekt einer vollständigen Klassifizierung sowie einer präzisen Begriffsbildung (z. B. Trennung der Begriffe „parallel“, „echt parallel“, „identisch“). Flussdiagramme und Tabellen sind ein geeignetes Mittel, solche Algorithmen darzustellen. Es werden möglichst selbstständig solche Darstellungen entwickelt, die auf Lernplakaten dokumentiert, präsentiert, verglichen und hinsichtlich ihrer Brauchbarkeit beurteilt werden können. In diesem Teil des Unterrichtsvorhabens sollen nicht nur logische Strukturen reflektiert, sondern auch Unterrichtsformen gewählt werden, bei denen Kommunikationsprozesse im Team unter Verwendung der Fachsprache angeregt werden. Eine analoge Bearbeitung der in Q-GK-G2 erarbeiteten Beziehungen zwischen Geraden und Ebenen bietet sich an. | Vorbereitung:  1.3 Gauss-Algorithmus |

#### Q-Phase Grundkurs Stochastik (S)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Thema:** *Von stochastischen Modellen, Zufallsgrößen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihren Kenngrößen (Q-GK-S1)* | |  |  |
| **Zu entwickelnde Kompetenzen** | **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** |  |  |
| **Inhaltsbezogene Kompetenzen:**  *Die Schülerinnen und Schüler*   * untersuchen Lage- und Streumaße von Stichproben * erläutern den Begriff der Zufallsgröße an geeigneten Beispielen * bestimmen den Erwartungswert µ und die Standardabweichung σ von Zufallsgrößen und treffen damit prognostische Aussagen   **Prozessbezogene Kompetenzen:**  ***Modellieren***  *Die Schülerinnen und Schüler*   * treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren)* * erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* * beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)* | Anhand verschiedener Glücksspiele wird zunächst der Begriff der Zufallsgröße und der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung (als Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zu den möglichen Werten, die die Zufallsgröße annimmt) zur Beschreibung von Zufallsexperimenten eingeführt.  Analog zur Betrachtung des Mittelwertes bei empirischen Häufigkeitsverteilungen wird der Erwartungswert einer Zufallsgröße definiert.  Das Grundverständnis von Streumaßen wird durch Rückgriff auf die Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler mit Boxplots in der Sekundarstufe I reaktiviert.  Über eingängige Beispiele von Verteilungen mit gleichem Mittelwert aber unterschiedlicher Streuung wird die Definition der Standardabweichung als mittlere quadratische Abweichung im Zusammenhang mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen motiviert; anhand gezielter Veränderungen der Verteilung werden die Auswirkungen auf deren Kenngrößen untersucht und interpretiert.  Anschließend werden diese Größen zum Vergleich von Wahrscheinlichkeits­verteilungen und zu einfachen Risikoabschätzungen genutzt. | Häufigkeitsverteilung, Mittelwert, Histogramm, …. Auch am GTR  Lege für die Stochastik ein Merkblatt für die GTR-Befehle an! Hefte es in die Daltonmappe!  Zufallsexperiment, Ergebnis, Ereignis, alle Begriffe daran einführen,  EXCEL  S. 224 – 232  (1 Woche) | Selbst lernen  Streuung um den Mittelwert  S. 229 – 232  S. 235 Noch fit in Wahr-  scheinlichkeitsrechnung  - |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Thema:** *Treffer oder nicht? – Bernoulli-Experimente und Binomialverteilungen* |  | *(Q-GK-S2)* | | |
| **Zu entwickelnde Kompetenzen** | **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** |  |  |
| **Inhaltsbezogene Kompetenzen:**  *Die Schülerinnen und Schüler*   * verwenden Bernoulliketten zur Beschreibung entsprechender Zufalls­experimente * erklären die Binomialverteilung im Kontext und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten * beschreiben den Einfluss der Parameter *n* und *p* auf Binomialverteilungen und ihre graphische Darstellung * bestimmen den Erwartungswert *µ* und die Standardabweichung *σ* von Zufallsgrößen […]   **Prozessbezogene Kompetenzen:**  ***Modellieren***  *Die Schülerinnen und Schüler*   * treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren)* * erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* * beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)*   ***Werkzeuge nutzen***  *Die Schülerinnen und Schüler*   * nutzen grafikfähige Taschenrechner und Tabellenkalkulationen […] * verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … Generieren von Zufallszahlen … Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten Zufalls-  größen  … Erstellen der Histogramme von Binomialverteilungen … Variieren der Parameter von Binomialverteilungen … Berechnen der Kennzahlen von Binomialverteilungen (Erwartungs-  wert, Standardabweichung) | Der Schwerpunkt bei der Betrachtung von Binomialverteilungen soll auf der Modellierung stochastischer Situationen liegen. Dabei werden zunächst Bernoulliketten in realen Kontexten oder in Spielsituationen betrachtet.  Durch Vergleich mit dem „Ziehen ohne Zurücklegen“ wird geklärt, dass die Anwendung des Modells ‚Bernoullikette’ eine bestimmte Realsituation voraussetzt, d. h. dass die Treffer von Stufe zu Stufe unabhängig voneinander mit konstanter Wahrscheinlichkeit erfolgen.  Zur formalen Herleitung der Binomialverteilung bieten sich das Galtonbrett bzw. seine Simulation und die Betrachtung von Multiple-Choice-Tests an.  Eine Visualisierung der Verteilung sowie des Einflusses von Stichprobenumfang *n* und Trefferwahrscheinlichkeit *p* erfolgt dabei durch die graphische Darstellung der Verteilung als Histogramm unter Nutzung des GTR.  Während sich die Berechnung des Erwartungswertes erschließt, kann die Formel für die Standardabweichung für ein zweistufiges Bernoulliexperiment plausibel gemacht werden. Auf eine allgemeingültige Herleitung wird verzichtet.  Durch Erkunden wird festgestellt, dass unabhängig von *n* und *p* ca. 68% der Ergebnisse in der 1σ -Umgebung des Erwartungswertes liegen.  *Hinweis: Der Einsatz des GTR zur Berechnung singulärer sowie kumulierter Wahrscheinlichkeiten ermöglicht den Verzicht auf stochastische Tabellen und eröffnet aus der numerischen Perspektive den Einsatz von Aufgaben in realitätsnahen Kontexten.* | Wichtige Begriffe: Zufallsgröße, Wahrscheinlichkeitsverteilung,  Erwartungswert  2 Wochen  Galtonbrett, real und in Simulation  S. 245 Bernoulli-Kette  Binomialverteilung  Verschiedene Übungen  Kumulierte Binomialverteilungen  3 Wochen  Erwartungswert, Standardabweichung einer Binomialverteilung  S.278 fff  σ-Umgebungen  S.287  GTR!!!  2 Wochen | Verständnis vom Binomial-  koeffizienten: Pascalesches Dreieck  oder Galton  z.B. S. 249 ff (2 Wochen)  S. 261 Blickpunkt: mithilfe des GTR  Vervollständige dein Merkblatt!  Übungsaufgaben  Selbst lernen Berechnen von  Intervall-Wahrscheinlichkeiten  S. 266 – 270 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Thema:** *Modellieren mit Binomialverteilungen (Q-GK-S3)* | |  |  |
| **Zu entwickelnde Kompetenzen** | **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** |  |  |
| **Inhaltsbezogene Kompetenzen:**  *Die Schülerinnen und Schüler*   * nutzen Binomialverteilungen und ihre Kenngrößen zur Lösung von Problemstellungen * schließen anhand einer vorgegebenen Entscheidungsregel aus einem Stichprobenergebnis auf die Grundgesamtheit   **Prozessbezogene Kompetenzen:**  ***Modellieren***  *Die Schülerinnen und Schüler*   * treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren)* * erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* * beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)* * beurteilen die Angemessenheit aufgestellter […] Modelle für die Fragestellung *(Validieren)* * reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen *(Validieren)*   ***Argumentieren***  *Die Schülerinnen und Schüler*   * stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her *(Begründen)* * nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen *(Begründen)* * verknüpfen Argumente zu Argumentationsketten *(Begründen)* | In verschiedenen Sachkontexten wird zunächst die Möglichkeit einer Modellierung der Realsituation mithilfe der Binomialverteilung überprüft. Die Grenzen des Modellierungsprozesses werden aufgezeigt und begründet. In diesem Zusammenhang werden geklärt:   * die Beschreibung des Sachkontextes durch ein Zufallsexperiment * die Interpretation des Zufallsexperiments als Bernoullikette * die Definition der zu betrachtenden Zufallsgröße * die Unabhängigkeit der Ergebnisse * die Benennung von Stichprobenumfang *n* und Trefferwahrscheinlichkeit *p*   Dies erfolgt in unterschiedlichsten Realkontexten, deren Bearbeitung auf vielfältigen Zeitungsartikeln basieren kann. Auch Beispiele der Modellumkehrung werden betrachtet („Von der Verteilung zur Realsituation“).  Prüfverfahren mit vorgegebenen Entscheidungsregeln bieten einen besonderen Anlass, um von einer (ein- oder mehrstufigen) Stichprobenentnahme aus einer Lieferung auf nicht bekannte Parameter in der Grundgesamtheit zu schließen.  Wenn genügend Unterrichtszeit zur Verfügung steht, können im Rahmen der beurteilenden Statistik vertiefend (und über den Kernlehrplan hinausgehend) Produzenten- und Abnehmerrisiken bestimmt werden.  *Hinweis: Eine Stichprobenentnahme kann auch auf dem GTR simuliert werden.* | Beurteilende Statistik  S. 290 – 296  Von der Gesamtheit auf die Stichprobe  Übungen  S. 297 Entscheidungsregel  4 Wochen | Beurteilende Statistik  S. 290 – 296  Die beiden anderen Anwen-  dungen  Projekt?  Beispiele zu Entscheidungs-  regeln |
| **Thema:** *Von Übergängen und Prozessen (G-GK-S4)* | |  |  |
| **Zu entwickelnde Kompetenzen** | **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** |  |  |
| **Inhaltsbezogene Kompetenzen:**  *Die Schülerinnen und Schüler*   * beschreiben stochastische Prozesse mithilfe von Zustandsvektoren und stochastischen Übergangsmatrizen * verwenden die Matrizenmultiplikation zur Untersuchung stochastischer Prozesse (Vorhersage nachfolgender Zustände, numerisches Bestimmen sich stabilisierender Zustände)   **Prozessbezogene Kompetenzen:**  ***Modellieren***  *Die Schülerinnen und Schüler*   * erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (Strukturieren) * übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren) * erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren) * beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (Validieren)   ***Argumentieren***  *Die Schülerinnen und Schüler*   * präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur *(Vermuten)* * nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen *(Begründen)* * stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her *(Begründen)* * überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können *(Beurteilen)* | *Hinweis:*  *Die Behandlung stochastischer Prozesse sollte genutzt werden, um zentrale Begriffe aus Stochastik (Wahrscheinlichkeit, relative Häufigkeit) und Analysis (Grenzwert) mit Begriffen und Methoden der Linearen Algebra (Vektor, Matrix, lineare Gleichungssysteme) zu vernetzen. Schülerinnen und Schüler modellieren dabei in der Realität komplexe Prozesse, deren langfristige zeitliche Entwicklung untersucht und als Grundlage für Entscheidungen und Maßnahmen genutzt werden kann.*  Der Auftrag an Schülerinnen und Schüler, einen stochastischen Prozess graphisch darzustellen, führt in der Regel zur Erstellung eines Baumdiagramms, dessen erste Stufe den Ausgangszustand beschreibt. Im Zusammenhang mit der Interpretation der Pfadregeln als Gleichungssystem können sie daraus die Matrix-Vektor-Darstellung des Prozesses entwickeln.  Untersuchungen in unterschiedlichen realen Kontexten führen zur Entwicklung von Begriffen zur Beschreibung von Eigenschaften stochastischer Prozesse (Potenzen der Übergangsmatrix, Grenzmatrix, stabile Verteilung). Hier bietet sich eine Vernetzung mit der Linearen Algebra hinsichtlich der Betrachtung linearer Gleichungssysteme und ihrer Lösungsmengen an. | Einstiegsaufgabe  S. 301  Übergangsmatrix, Übergangsdiagramm, Matrzenmultiplikation  2 Wochen  Zurückliegende Zustände,  inverse Matrix | Übungen zum Rechnen mit Matrizen;  weiteres Modellierungsbeispiel mit  mehreren Übergängen und Potenzen von Matrizen  S.  Zurückliegende Zustände,  inverse Matrix  Vielleicht:  Wiederhole das Gauß-Verfahren und  die Lösbarkeit von Gleichungen |